

Halmazok

- 1) Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbéli sorrend szerint:
166; 175; 156; 161; 159; 171; 167; 169; 160; 159; 168; 161; 165; 158; 170; 159
- a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (5 pont)
- Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.
- b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:
- (1) minden diák tanul legalább két nyelvet.
 - (2) Az angolt is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
 - (3) Angolul 27-en tanulnak.
 - (4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (7 pont)
- 2) Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a -javítatlan- szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.
- a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel? (9 pont)
- b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten? (4 pont)
- 3) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztnéve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól tudjuk:
- csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;
 - egyedül Balázs nem üzi egyik sportágat sem
 - Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.
- a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak? (5 pont)
- Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.
- b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)
- Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szült.
- c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnévűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)
- d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

- 4) Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > -2\right\}$. Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, B/A halmazokat! (13 pont)
- 5) Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.
- a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?(5 pont)
- b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt? (6 pont)
- c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az A urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A B urnában azoknak az éttermeknek a neve található, –mindegyik pontosan egyszer– amelyekben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyereség valószínűsége? (5 pont)
- 6) a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsón az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)
- b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)
Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)
- c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.
Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)
- 7) Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát. Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és az $A \cup B$ halmazt! (11 pont)
- 8) Jelölje H a $\sqrt{5,2-x} \leq 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H , a B , a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)

9) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer S síkjában. Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $4x - 3y \geq 18$, azaz $A := \{P(x; y) \in S \mid 4x - 3y \geq 18\}$;

a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0, \text{ azaz } B := \{P(x; y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0\},$$

a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira:

$$y^2 = 4, \text{ azaz } C := \{P(x; y) \in S \mid y^2 = 4\}.$$

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az A , a B és a C halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

c) Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x; y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

10)

a) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15? (5 pont)

b) Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát! (8 pont)

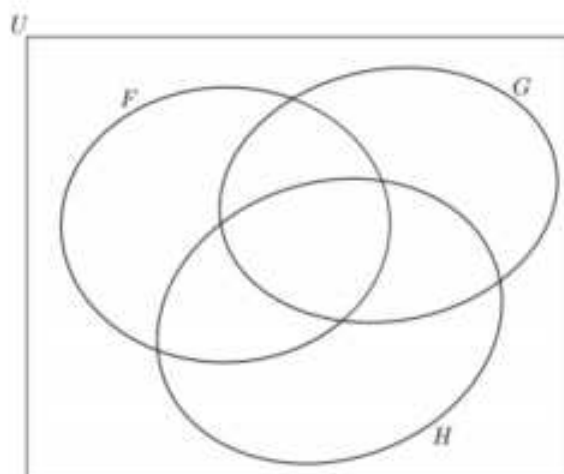
11) Jelölje H a $\sqrt{5,2-x} \leq 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát.

Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H , a B , a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)

12) Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U -nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! (2 pont)

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot! (5 pont)



Egy telephely K, L, M, N, P, Q épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha K és L épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőrzi a biztonsági őr.) (4 pont)

Megrajzoltuk a $ABCDE$ konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki! (5 pont)

13) Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halmaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

a) Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak? (5 pont)

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

b) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összeg 4 lesz? (5 pont)

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot ($n > 80$); ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet $(n - 80)$ forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot.

c) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0? (6 pont)

14)

a) Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van. (6 pont)

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{3}{(1 + \cos x)^2 + 2}$ függvény értékkészlete az $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ intervallum. (5 pont)

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz? (5 pont)